جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

تحليل (٣)

المحاضرة النظرية الثالثة

(٣)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

١

في المحاضرة السابقة قمنا بدراسة مفهوم السلسلة العددية و مفهوم تقارب السلسلة العددية ، و بعض خواص التقارب ...
والآن سوف ندرس اختبارات تقارب السلاسل العددية ...
مفردات المحاضرة :

* مفهوم السلسلة العددية الموجبة ....

1- اختبار المقارنة الأول ....
2- اختبار المقارنة الثاني ....
3- الاختبار التكاملي ....
4- اختبار كوشي (الجذر النوني) ....
5- اختبار دالامبير ....
6- اختبار راب ....
7- اختبار غاوص ....

← اختبارات تقارب السلاسل الموجبة

* مفهوم السلسلة العددية المتناوبة ....
- اختبار لايبنتز ← اختبار تقارب للسلاسل المتناوبة .

لِنَبْدَأ ....

اختبارات تقارب السلاسل الموجبة :

تعريف : نقول عن عن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها ذات حدود موجبة إذا كانت $a_n > 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

مثلاً : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{n}}$ هذه سلسلة عددية موجبة ، لأن كل حدودها موجبة .

Scanned by CamScanner

اختبار المقارنة الأول :

اختبار التقارب الأول :

ليكن لدينا السلسلتين العدديتين الموجبتين :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ولتكن $a_n \le b_n$ عندها يكون :

مهما كان $n \in N$ فإنه :

1) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون أيضاً متقاربة.

2) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون متباعدة.

« أي من تقارب الكبيرة نستنتج تقارب الصغيرة »

« أو من تباعد الصغيرة نستنتج تباعد الكبيرة »

نعرض مثال على اختبار المقارنة الأول :

مثال : ادرس تقارب السلسلة العددية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$$

الحل : نلاحظ أن هذه السلسلة ذات حدود موجبة ونلاحظ أن :

« من تصغير المقام : الكسر ذو المقام الأصغر هو الأكبر »

$\frac{2^n}{1+2^{2n}} \le \frac{2^n}{2^{2n}}$

ونلاحظ أن :

$$\frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{2^n}{2^{n+n}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n}$$

وبالتالي ←

وبالتالي : $\frac{2^n}{1+2^{2n}} \le \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذاً : $\frac{2^n}{1+2^{2n}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، و نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

سلسلة هندسية ، و أساسها $r = \frac{1}{2} < 1$

(و كما ذكرنا في المحاضرة الثانية في الصفحة 28 في السطر السابع) عندما يكون أساس السلسلة الهندسية أصغر من الواحد تكون السلسلة متقاربة .

إذاً السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي سلسلة متقاربة .

و بحسب اختبار المقارنة الأول (من تقارب السلسلة الأكبر ينتج تقارب السلسلة الأصغر) ، يكون السلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ متقاربة .

اختبار المقارنة الثاني

اختبار المقارنة الثاني :

ليكن لدينا السلسلة العددية الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و السلسلة العددية الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

و لو أخذنا : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$

1) إذا كان $0 < k < \infty$ فإن السلسلتين من طبيعة واحدة .

2) إذا كان $k = 0$ و السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة أيضاً .

3) إذا كانت $k = \infty$ و السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون أيضاً سلسلة متباعدة .

و إذا كانت k على غير ذلك نلجأ إلى اختبار آخر .

ملاحظة : يسمى اختبار المقارنة الثاني أيضاً باختبار المقارنة بالنهاية

ندرس مثال على اختبار المقارنة بالنهاية :

ادرس تقارب السلسلة العددية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^{-2n}}{n^2+1}$

الحل : نلاحظ أنَّ هذه السلسلة ذات حدود موجبة .

نقارن مع السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$b_n = \frac{n+e^{-2n}}{n^2+1} \quad , \quad a_n = \frac{1}{n}$$

(التركيب في القريب على البعيد في البعيد) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+e^{-2n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n\cdot(n+e^{-2n})}{1\cdot(n^2+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n\cdot e^{-2n}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+e^{-2n}}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{e^{2n}}}{n+\frac{1}{n}}$$

قمنا بإخراج n عامل مشترك

أخرج أيضاً من البسط و المقام العامل n ، فنتبع النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n\cdot e^{2n}}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\cdot e^{2n}}\right) \Big\backslash \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 = k$$

إذاً : $0 < k = 1 < \infty$

و ذلك يطابق الحالة الأولى من الحالات الثلاث لاختبار المقارنة الثاني .

و إنَّ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ « التوافقية » هي سلسلة متباعدة ، و بالتالي حسب اختبار المقارنة الثاني فإنَّ السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة .

إذاً السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^{-2n}}{n^2+1}$ هي سلسلة متباعدة ...

تمارين غير محلولة : « وظيفة »

1) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود موجبة متقاربة .

برهن أنه : [1] السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ متقاربة .

[2] السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ متقاربة .

---

2) ادرس تقارب السلسلتين الآتيتين :

[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}$

[2] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln(n)}}$

اختبار التقارب الثالث : الاختبار التكاملي

ليكن لدينا العدد الحقيقي a و ليكن لدينا التابع f حيث :

$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ومستمر

و التابع f موجب و متناقص على مجال تعريفه $[1, +\infty[$.

عندئذٍ نضع بالتعريف من أجل كل $n \in N$ مايلي :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ldots$ و $t_n = \int_1^n f(x)\,dx$

عندئذٍ يكون للمتتاليتين t_n و S_n نفس السلوك (أي إما أن تتقاربا معاً أو تتباعدا معاً) .

مثال على الاختبار التكاملي :

برهن أن سلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ متقاربة إذا كان $s>1$ ←

وَ متباعدة فيما عدا ذلك ؛

الحل: لنبين أنَّ هذه السلسلة العددية متقاربة من أجل جميع قيم $s>1$ ومتباعدة إذا كان $s<1$ وَ $s=0$ وَ $s=1$

1) من أجل $s=0$ نلاحظ أن السلسلة تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

وَ هذه السلسلة متباعدة لأنَّ متتالية المجاميع الجزئية لها متباعدة (تسعى نحو $+\infty$).

2) من أجل $s=1$ نلاحظ أنَّ السلسلة تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ، وهذه السلسلة هي السلسلة التوافقية، وهي متباعدة، وَ متتالية المجاميع الجزئية لها ليست متتالية كوشي، لذلك هي متباعدة.

3) من أجل $s<0$ (s عدد سالب) نلاحظ أنَّ السلسلة تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ وهي سلسلة متباعدة لأنَّ حدها العام لا يسعى نحو الصفر.

4) من أجل الحالات المتبقية لـ s ، نأخذ الدالة الحقيقية $f(x)$ وَ المعرفة على $]1,+\infty[$ ، حيث $f(x)=\frac{1}{x^s}$

فنجد أن هذه الدالة موجبة وَ مستمرة وَ متناقصة في ذلك المجال. وَ لنضع بالتعريف: $t_n=\int_1^n f(x)\,dx\,;\,n\in N$

فنجد أنَّ: المتتالية العددية (t_n) متقاربة من أجل كل $1<s<\infty$ ، وَ متباعدة من أجل كل $0<s<1$

وَ ذلك لأنه من أجل كل $n\in N$ لدينا:

$$t_n=\int_1^n f(x)\,d(x)=\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx=\frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)$$

ومن ثم سيصبح لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim\left[\frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)\right] = \frac{1}{s-1} \quad ; s>1$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim\left[\frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)\right] = +\infty \quad ; 1>s>0$$

و بعد ذلك نكون تم إثبات المطلوب.

تمرين غير محلول: ادرس تقارب سلسلة برتراند $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$

حيث أنّ α و β عددين موجبين.

اختبار التقارب الرابع: **اختبار الجذر النوني (كوشي):**

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة

و لنفرض أنّ: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$

- إذا كان: $k<1$ تكون السلسلة متقاربة
- إذا كان: $k>1$ تكون السلسلة متباعدة
- إذا كان: $k=1$ سيكون لدينا حالة شك و يفشل الاختبار

مثال: ادرس تقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

الحل: نلاحظ أنّ السلسلة ذات حدود موجبة.

نطبق اختبار كوشي: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$

$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = 2\cdot\frac{1}{e} < 1$$

إذاً: $1<k$ ⇐ وبالتالي السلسلة متباعدة.

اختبار التقارب الخامس: ...... **اختبار دالامبير**

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة.

ولنفرض: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$

- إذا كانت $1>k$ فتكون السلسلة متقاربة.
- إذا كانت $1<k$ فتكون السلسلة متباعدة.
- إذا كانت $1=k$ فلا يوجد قرار بخصوص السلسلة «حالة شك».

تمرين مثال: ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n$

الحل: نلاحظ أن هذه السلسلة ذات حدود موجبة.

نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot 2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-n}}{(n+1)}\cdot 2^{n-n-1}\cdot(n+1)^{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2^{-1}\cdot\frac{n^{-n}}{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2^{-1}\cdot(n+1)^{n+1-1}\cdot n^{-n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2^{-1}\cdot(n+1)^n\cdot n^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}$$

في السطر (*):

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2e}>1$$

فالسلسلة متباعدة.

اختبار التقارب السادس : **اختبار رآب :**

ليكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية موجبة ، و ليكن :

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = k$$

- إذا كان : $k > 1$ تكون السلسلة متقاربة .
- إذا كان : $k < 1$ تكون السلسلة متباعدة .

* على عكس اختبار دالامبير و اختبار كوشي .

- إذا كان $k = 1$ فلا يمكن الحكم ، و حالة شك .

تمرين مثال : ادرس تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \times \frac{1}{2n+1}$$

الحل : نلاحظ هنا لو قمنا بتطبيق اختبار دالامبير ، ستكون النتيجة $k = 1$ أي حالة شك .

نلجأ إلى اختبار رآب :

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \times \frac{1}{2n+1}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)} \times \frac{1}{2n+3}} \times n - n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \times \frac{1 \cdot (2n+3)}{1 \cdot (2n+1)} \times n - n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n-1)(2n+2)(2n+3) \cdot n}{(2n+1)(2n)(2n+1)} - n \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n-1)(2n+2)(2n+3)}{2 \cdot (2n+1)^2} - n \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(4n^2-2n+4n-2)(2n+3)}{8n^2+4n+2} - n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(4n^2-2n+4n-2)\cdot(2n+3) - 8n^3+4n^2+2n}{8n^2+4n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{20n^2+4n-6}{8n^2+4n+2}\right) = \frac{20}{8} = \frac{10}{4} = \frac{5}{3} > 1$$

إذاً: السلسلة متقاربة ..

اختبار التقارب السابع: .... **اختبار غاوص**

ليكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ذات حدود موجبة، وليكن:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{L}{n} + \frac{B_n}{n^r} \quad ; \quad r>1$$

• B_n: هي متتالية محدودة .... عندها يكون:

- إذا كانت $L>1$ تكون السلسلة متقاربة.

- إذا كانت $L<1$ تكون السلسلة متباعدة ......

✱ سنورد مثالاً عن اختبار غاوص في المحاضرة العملية الأولى.

وبذلك تكون قد انتهت دراستنا النظرية لاختبارات تقارب السلاسل العددية الموجبة (ذات الحدود الموجبة) ....

سوف نختم هذه المحاضرة بدراسة مفهوم السلسلة المتناوبة ودراسة اختبار لتقارب السلاسل المتناوبة .... و هو .... اختبار لايبنتز .....

11

مفهوم السلسلة العددية المتناوبة :

نقول عن سلسلة عددية أنها متناوبة إذا كانت إشارة حدودها المتتالية متناوبة بين موجبة و سالبة .

أي أنها .. تكون بالشكل ..

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \quad \text{أو} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

حيث أنه .. $a_n > 0$ .. مهما كانت $n \in N$

اختبار لايبنتز للسلاسل المتناوبة :

لتكن $\{a_n\}$ متتالية متناقصة تتقارب نحو الصفر .

عندها تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ متقاربة .

البرهان :

لتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة ،

ولدينا : $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

و إنّ ناتج جمع هذه الحدود هو موجب ، حيث أن السلسلة متناقصة ، أي : $a_1 \geq a_2$ و $a_3 \geq a_4$ و ... $a_n \geq a_{n+1}$

و إنّ : $S_{2n} \geq 0$

و بالتالي $\{S_{2n}\}$ موجبة و متزايدة لأنه عند إيجاد S_{2n+2} فإننا نضيف حدين موجبين إلى السلسلة ، فتكون متزايدة .

كما أنّ : $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

$(a_2 - a_3) \geq 0$

و بالتالي فإنّ : $S_{2n} \leq a_1$.

نجد $0 \leq S_{2n} \leq a_1$ و بالتالي متتالية محدودة

ومتزايدة ، و بالتالي متقاربة نحو S .

- بفرض $\{S_{2n+1}\}$ متقاربة نحو S ، فإنّ :

$$|S_{2n+1} - S| = |S_{2n} + a_{2n+1} - S| = |(S_{2n} - S) + a_{2n+1}| \leq$$

$$a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\leq |S_{2n} - S| + |a_{2n+1}|$$

فالمتتالية $\{S_n\}$ تكون متقاربة من العدد S و بالتالي

هي سلسلة متقاربة ، وتمّ المطلوب .

مثال : ادرس تقارب السلسلة : ← $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sin(n)}$

الحل : السلسلة متناوبة وهي

من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

حيث أنّ ، $a_n = \frac{1}{n - \sin(n)}$

و $a_n > 0$ ، فهي سلسلة ذات

حدود موجبة ، ولنطبق اختبار

ليبنتز ، $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\left(1 - \frac{\sin(n)}{n}\right)}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-1} = 0$

و نلاحظ أنّ التابع $f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$

المعرف على $[1, +\infty[$ هو تابع متناقص

لأنّ $f'(x) = \frac{\cos x - 1}{(x - \sin x)^2} \leq 0$

فالمتتالية $\{a_n\}$ متناقصة

حسب ليبنتز ، السلسلة متقاربة

انتهت المحاضرة الثالثة

writen by : Dani Mahfoud / wahab Al Hasan